4éme Tec et Sci

Série de Révision N°5

Géometrie dans l'espace et Sphere.

EXERCICE N°1 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j})$.

Soit les points A (0,1,1) ; B (2,0,1) ;C (1,1,0) et H (m,1,m) , m $\in$ IR.

❶ a) calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan et déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

❷ a) Montrer que pour m $\neq \frac{1}{2}$, les points A , B , C et H sont non coplanaires

b) Déterminer m pour que le volume du tétraèdre ABCH soit égal 2.

❸ Vérifier q'une équation cartésienne du plan Q médiateur de [AB] est : 4 x -2 y – 3 = 0

❹ Soit S la sphère de centre O et tangente au plan P : x + 2 y + z – 3 = 0

a) Préciser son rayon R.

b) Déterminer les coordonnées de I son point de contact avec le plan P

c) Montrer que S et Q sont sécants suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE N°2 :

Soit $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace et ABCDEFGH est un parallélépipède tel que : $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$; $\overrightarrow{AD}=4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$

❶ a- Vérifier que : $\overrightarrow{AG}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$

b- Déterminer les composantes de chacun des vecteurs : $\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$

c- Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

❷ Soit α un réel différent de 1 et M de coordonnées (2α, 4α, 3α).

a- Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.

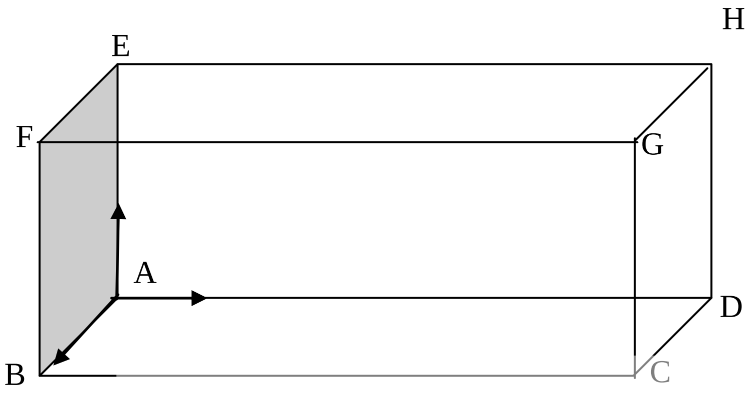
b- Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).

❸ Soit v le volume du tétraèdre MEBG.

a- Exprimer v en fonction de α .

b- Calculer le volume du tétraèdre AEBG.

c- Pour quelles valeurs de α , v est-il égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH ?



EXERCICE N°3 :

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.On considère les points A(1, 0, 2), B(0, 0, 1) C(0, 1, m) et E(0, m-1, 3) où m est un paramètre réel.

❶ a- Déterminer les composantes de vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b- Montrer qu'une équation du plan (ABC) est P_m : $-x - (m-1)y + z - 1 = 0$

❷ a- Montrer que le volume du tétraèdre EABC est égal $\frac{1}{6}\left|m^2-2m-1\right|$.

b- Déterminer la valeur de m pour laquelle le volume du tétraèdre EABC est minimal.

❸ Soit S la sphère de centre I(1, 1, 0) et de rayon $\sqrt{2}$ .Déterminer l'intersection de S et P_3.

EXERCICE N°4 :

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On donne le plan P : $2x - y - 2z = 0$ et la sphère S d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$.

❶ Déterminer le centre I et le rayon R de la sphère.

❷ Montrer que $S \cap P$ est un cercle ζ dont on précisera le centre H et le rayon r.

❸ Trouver une équation de la sphère S' de centre J(0, 1, -1) et tangent à P.

❹ Soit Δ la droite perpendiculaire à P et passant par I et Δ' la droite passant par A(0, 0, 4) et de vecteur directeur $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Déterminer les représentations paramétrique de Δ et Δ'. En déduire $\Delta \cap \Delta'$.

❺ a- Trouver une équation du sphère S'' de diamètre [CD] avec C(-3, 2, 1),D(1, 0, 1)

b- Déterminer l'équation du plan médiateur de [CD].

EXERCICE N°5 :

Soit l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et soit l'ensemble S des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 2 = 0$.

❶ Montrer que S est une sphère dont on précisera son centre I et son rayon R.

❷ Soit P_m le plan d'équation : $2x - y + 2z + 3m - 4 = 0$; $m \in IR$.

a- Montrer que P_0 et S sont tangents.

b- Etudier suivant les valeurs de m les positions relatives de P_m et S.

c- Montrer que $S \cap P_1$ est un cercle qu'on déterminera son rayon r et son centre H.

❸ Soit le point A(-1,0,1).

Vérifier que $A \in S$ et déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à S en A.

❹ Soit le point B(1,2,1) et $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

a- Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b- Déterminer $\Delta \cap S$.

EXERCICE N°6 :

Soit l'ensemble S = { M(x, y, z) $\in \xi$ / $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0$ }.

❶ Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon R.

❷ Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $x - 2y + 2z + 2 = 0$

a- Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle.

b- Déterminer les coordonnés du centre A et le rayon r du cercle ζ.

❸ Soit M(a, b, -1) un point de la sphère S avec a et b deux réels et le plan Q : $(a-1)x + (b+2)y + z - a + 2b + 3 = 0$.

a- Montrer que M appartient au plan Q.

b- Montrer que S et Q sont tangents en M.

EXERCICE N°7 :

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points A (3,-3,0) ; B (-3,-3 ; 8) ; le plan P : $x + 2y - 2z + 5 = 0$ et l'ensemble S des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 8z = 0$.

❶ Montrer que S est une sphère de centre I (0,-3,4) et de rayon R = 5.

❷ a) Déterminer la représentation paramétrique de la droite Δ passant par I est perpendiculaire à P.

b) Déterminer les coordonnées du point H l'intersection de P et Δ.

❸ Montrer que P coupe S selon un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

❹ Soit le plan Q : $-3x + 4z + 9 = 0$; Montrer que Q est tangent à S en A.

❺ a) Vérifier que [AB] est un diamètre de S.

b) En déduire une équation du plan Q' parallèle à Q et tangent à S.

❻ Soit le point C (0,-6,0).

a) Montrer que OABC est un tétraèdre inscrit dans S.

b) Calculer le volume v du tétraèdre OABC.